**模块一 函数的概念与性质**

**基础知识回顾**

一、函数的三要素

1．定义域：自变量*x*的取值集合，若不作特别规定，定义域是使得函数的解析式有意义的*x*的取值集合.

2．对应关系：将自变量*x*对应到函数值*y*的方法，对于有解析式的函数，解析式就是该函数的对应关系.

3．值域：函数值*y*的取值集合.

二、函数的单调性

1．函数的单调性：一般地，设函数的定义域是*I*，区间，如果，当时，都有，那么就称在区间*D*上单调递增；如果，当时，都有，那么就称在区间*D*上单调递减.

2．函数单调性的等价定义方法：且，若或，则在区间*D*上单调递增；若或，则在区间*D*上单调递减.

3．函数的最大值：一般地，设函数的定义域为*I*，如果存在实数*M*满足：

（1），都有；（2），使得；

那么，我们称*M*是函数的最大值.

4．函数的最小值：一般地，设函数的定义域为*I*，如果存在实数*m*满足：

（1），都有；（2），使得；

那么，我们称*m*是函数的最小值.

5．若函数和在区间*D*上具有单调性，则：

（1）若*C*为常数，则函数与函数有相同的单调性.

（2）在区间*D*上，若，则与单调性相同；若，则与单调性相反.

（3）若，则与单调性相同.

（4）若和单调性相同，则的单调性与它们也相同.

（5），，且和单调性相同，则的单调性与它们也相同.

6．复合函数的单调性：同增异减

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

三、函数的奇偶性

1．奇函数的性质

（1）定义域关于原点对称；（2）；（3）图象关于原点对称；若处有定义，则.

2．偶函数的性质

（1）定义域关于原点对称；（2）满足；（3）图象关于*y*轴对称.

3．常见的几个奇函数

（1） （2）

（3） （4）

（5） （6）

4．加减法结论：奇函数奇函数奇函数；偶函数偶函数偶函数；奇函数偶函数非奇非偶函数.

5．乘除法结论：

（1）奇函数奇函数偶函数；奇函数偶函数奇函数；偶函数偶函数偶函数.

（2）奇函数奇函数偶函数；奇函数偶函数奇函数；偶函数偶函数偶函数.

6．无论是什么函数，函数和都是偶函数.

7．若是奇函数或者偶函数，则函数是偶函数.

8．多项式函数的奇偶性：

（1）当且仅当时，为奇函数；（2）当且仅当时，为偶函数.

四、周期性

一般地，设函数的定义域为*D*，若存在，使得，都有，则称是以*T*为周期的周期函数.

五、对称性

对称性有关知识点，请参考本模块第4节，抽象函数问题.

**第1节 函数概念**

**内容提要**

这一节主要涉及求定义域、求解析式、求一些常见函数的值域这三类问题.

1．求定义域

（1）偶次方根：如，，，…，根号下的数非负，即；

（2）对数：，真数大于0，即；

（3）分式：如，分母不为0，即；

（4）零次方：中；

（5）正切：中；

（6）抽象函数求定义域：①定义域永远指自变量*x*的取值集合；②“括号范围恒不变”.

2．求解析式

（1）换元法：已知的解析式，求的解析式.

（2）待定系数法：已经给出函数类型，可用待定系数法求解析式.

（3）方程法：题干给出与，或与的关系式，可构造新方程，联立求解得出解析式.

3．求值域：图象法、同除法、换元法、判别式法等.

**典型例题**

【例1】函数的定义域为 .

答案：

解析：由解得：且，所以的定义域为.

【反思】函数的定义域一定要写成区间或集合的形式.

【变式1】函数的定义域为 .

答案：

解析：由解得：且，所以的定义域为.

【变式2】若的定义域为，则函数的定义域为 .

答案：

解析：定义域指的是自变量*x*的取值集合，的定义域为，

抽象函数定义域遵循括号范围恒不变原则，所以在中，有，解得：，

故的定义域为.

【反思】抽象函数的定义域问题抓住两点：①定义域永远指自变量*x*的取值集合；②“括号范围恒不变”.

【变式3】若的定义域为，则函数的定义域为 .

答案：

解析：定义域指的是自变量*x*的取值集合，的定义域为在中，，

所以，即的括号的范围是，括号范围恒不变，所以的定义域为.

【例2】已知，则 .

答案：

解析：先将括号里的整体换元，令，则，

所以，故.

【反思】已知函数的解析式求的解析式：①令，则可化为，②由反解出*x*，用*t*表示，代入所给函数的右侧，从而求得；③由研究*t*的取值范围，得到的定义域；④将的自变量*t*换回成*x*，得到.

【例3】已知是一次函数，且，则 .

答案：或

解析：已知了函数类型，用待定系数法求解析式，设，

则，即，

所以，解得：或，所以或.

【反思】若已知的函数类型（如一次函数、二次函数、指数函数等）求的解析式，可直接设其解析式，运用待定系数法求解.

【例4】已知函数满足，则 .

答案：

解析：看到和在同一个式子中，将*x*换成，再构造一个函数方程，

在中将*x*换成可得，所以，

得：，整理得：.

【例5】函数的最小值为 .

答案：1

解析：由题意，，当且仅当时取等号，所以.

【变式1】函数的最大值为 .

答案：

解析：由题意，，当且仅当时取等号，所以.

【变式2】函数的最小值为 .

答案：3

解法1：像这种型的分式函数，可令一次函数部分为*t*，

令，则，，所以，

当且仅当，即时取等号，此时，故函数的最小值为3.

解法2：也可把函数的解析式看成关于*x*的方程，将方程变形，利用判别式研究*y*的最值，

将变形成，整理得： ①，

将式①看成关于*x*的一元二次方程，其判别式，解得：或，

我们要求的是*y*的最小值，所以先用*x*的范围把这一段舍掉，

因为，所以，，从而，故，接下来验证*y*可以等于3，

注意到当时，，所以函数的最小值为3.

【变式3】函数的最大值为 .

答案：

解法1：像这种型的分式函数，可令一次函数部分为*t*，再分子分母同除以*t*，

令，则，，所以，

当且仅当，即时取等号，此时，故函数的最大值为.

解法2：也可把函数的解析式看成关于*x*的方程，将方程变形，利用判别式研究*y*的最值，

将变形成，整理得： ①，

当时，把①看成关于*x*的一元二次方程，其判别式，解得：，

要得出*y*的最大值是，还需要验证等号能成立，

注意到当时，，所以函数的最大值为.

【变式4】函数的最小值为 .

答案：

解法1：型的分式函数，可以通过拆项把分子化为一次函数，将问题化归成变式1的类型，

由题意，，

令，则，，且，

当且仅当，即时取等号，此时，从而函数的最小值为.

解法2：将变形成，整理得：，

当时，将该方程看成关于*x*的一元二次方程，

其判别式，解得：，

要得出*y*的最小值为，还需要验证等号能成立，

注意到当时，，所以函数的最小值为.

【变式5】函数的最大值为 .

答案：

解析：此处虽不是，但可以把分子的看成一次的，故将其换元成*t*，

设，则，，且，

当且仅当，即时取等号，此时，所以函数的最大值为.

**强化训练**

1．（2021·烟台期末·★）函数的定义域为（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：C

解析：由题意，，解得：或.

2．（2022·临潼一模·★）已知，则（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：C

解析：设，则，，所以.

3．（2021·遂宁期末·★★）若函数的定义域为，则的定义域为（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：C

解析：的定义域为，

括号范围恒不变，所以，从而，故的定义域是.

4．（2022·安徽四校联考·★★）已知的定义域为，且，则 .

答案：

解析：在中将*x*换成可得，所以，

得：，整理得：.

5．（2021·德州模拟·★★）函数的值域是 .

答案：

解析：将指数部分换元成*t*，令，则，且，

因为，所以，从而，故的值域是.

6．（2022·湖北模拟·★★）函数在上的最小值为 .

答案：1

解法1：设，则，因为，所以，

且，

当且仅当，即时取等号，此时，所以函数在上的最小值为1.

解法2：将变形成，整理得： ①，

将式①看成关于*x*的一元二次方程，则其判别式，解得：或，

因为，所以，，从而，故，

注意到当时，，所以函数在上的最小值为1.

7．（2022·辽宁模拟·★★★）函数的值域为 .

答案：

解法1：先将分子的平方项按分母的形式配凑，拆项化为的结构，

由题意，，下面将*x*除到分母上，先考虑的情形，

当时，；当时，，易求得或，

所以或，从而或，所以或，

综上所述，函数的值域为.

解法2：，整理得： ①，

当时，；当时，方程①可以看成关于*x*的一元二次方程，

其判别式，解得：，

综上所述，函数的值域为.

8．（2022·北京西城二模·★★★）若函数的定义域和值域的交集为空集，则实数*a*的取值范围是（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：B

解析：由题意，的定义域是，下面求的值域，在两段上分别考虑，

当时，，因为，所以在上的值域为；

此时要使的定义域和值域交集为空集，则，

下面再考虑第二段的值域，要讨论*a*和对称轴的位置关系，

当时，在上的值域为，

要使定义域与的交集为空集，应有，解得：或，故，

当时，在上的值域为，此时的定义域和值域交集不为空集，不合题意，

综上所述，实数*a*的取值范围是.

9．（2021·江苏模拟·★★★）函数的最大值为 .

答案：

解析：设，则，且，

当且仅当，即时取等号，此时，所以函数的最大值为.

10．（2021·广西三校联考·★★★）函数的最小值为 .

答案：

解析：解析式中分母这部分最复杂，将其整体换元，设，则，，

所以，

当且仅当，即时取等号，从而函数的最小值为.